Centre de recherche sur les transports (C.R.T.)
Centre for Research on Transportation

CRT-2003-02

L'OPTIMISATION DES FRÉQUENCES D'UN RÉSEAU DE TRANSPORT EN COMMUN MOYENNEMENT CONGESTIONNÉ

par

Yolanda Noriega
Michael Florian

Janvier 2003

Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal QC H3C 3J7 Canada
Téléphone : (514) 343-7575 / Télécopieur : (514) 343-7121

crt@crt.umontreal.ca
www.crt.umontreal.ca

HEC ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL Université de Montréal

PUBLICATION
CRT-2003-02

L'OPTIMISATION DES FRÉQUENCES D'UN RÉSEAU DE TRANSPORT EN COMMUN MOYENNEMENT CONGESTIONNÉ

par

Yolanda Noriega[1]
Michael Florian[1]

Cette recherche a été réalisée grâce en partie au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG).

[1] Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal, Canada H3C 3J7 (yolanda@crt.umontreal.ca, mike@crt.umontreal.ca)

Dépôt légal – Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada, 2003

103-07094/

Résumé

Cet article traite de l'optimisation des fréquences d'un réseau de transport en commun moyennement congestionné. Nous reprenons le modèle d'optimisation pour des réseaux sans congestion d'Isabelle Constantin et nous le modifions de façon à intégrer indirectement la capacité des véhicules. Le problème se formule comme un programme à deux niveaux du type Min-Min avec la même fonction objective. Cette fonction représente le temps de transport des voyageurs et tient compte de l'effet de congestion. Le programme extérieur modélise les intérêts de la société de transport tandis que le programme intérieur modélise le comportement des voyageurs. Une analyse de sensibilité est développée afin de déterminer une direction de descente pour le programme. L'algorithme de solution est implanté sous la forme d'une macro dans l'environnement du logiciel pour la planification du transport EMME/2. Des résultats numériques sont obtenus pour les villes de Winnipeg (Canada) et de Stockholm (Suède).

Mots clés : optimisation des fréquences, transport en commun, affectation non linéaire, congestion.

Abstract

This paper addresses the problem of the frequency optimization of transit lines in a congested transit network. We consider the transit frequency optimization model proposed by Constantin and we modify it to consider vehicles capacity indirectly. The model is formulated as a Min-Min bi-level optimization problem with the same objective function at both levels. This function represents the transportation time including a congestion penalty. The upper level correspond behavior. A descent direction for the problem is obtained by using sensitivity analysis of the lower level problem. The solution algorithm is implemented as a macro in the EMME/2 transportation planning software. Computational results are presented for the Winnipeg (Canada) and Stockholm (Sweden) transit networks.

Key words: frequency optimization, transit, non-linear assignment, congestion.

1. Introduction

Plusieurs auteurs ont étudié le problème d'optimisation des fréquences de réseaux de transport en commun. Schéele (1977) modélise le problème comme un programme non-linéaire. La fonction objectif consiste à minimiser le temps de transport de l'ensemble des voyageurs. Le comportement des voyageurs et les ressources limitées dont la société de transport dispose sont décrits à l'aide des contraintes. L'affectation des voyages se fait d'une façon normative.

Cette manière d'affecter les voyages ne décrivant pas correctement le comportement des voyageurs motive Constantin (1993) à proposer un modèle qui utilise la méthode d'affectation basée sur des stratégies optimales de choix de route, développée par Spiess (1984). Le modèle est représenté par un programme bi-niveau du type Min-Min dont la fonction objectif consiste à minimiser le temps de transport de l'ensemble des voyageurs. Des contraintes servent à décrire les intérêts de la société de transport ainsi que le comportement des voyageurs.

Les résultats obtenus par cette approche sont encourageants, cependant, le modèle ne tient pas compte de la capacité des véhicules. Or, nous croyons que la capacité doit être prise en compte au moment précis où les voyageurs choisissent leur route. C'est pourquoi nous formulons le problème comme un programme à deux niveaux du type Min-Min avec la même fonction objectif qui consiste à minimiser le temps de transport de l'ensemble des voyageurs. Pour modéliser les effets de la congestion nous considérons que le temps de déplacement sur un lien est une fonction qui dépend du volume sur le lien. Cette fonction décrit l'inconfort subit par le voyageur lorsqu'il monte à bord d'un véhicule bondé. Les contraintes de la société de transport sont considérées dans le programme extérieur tandis que le comportement des voyageurs est décrit dans le programme intérieur.

Cette formulation n'est appropriée que pour des réseaux de transport en commun faiblement ou moyennement congestionnés puisque le modèle considère que le voyageur, ayant choisi une ligne, peut toujours monter à bord du premier véhicule de cette ligne passant à l'arrêt.

Une analyse de sensibilité pour des modèles non linéaires permet de déterminer la direction de descente pour la fonction objectif. La façon de calculer cette dernière rend possible l'adaptation à notre modèle de l'algorithme d'optimisation de fréquences proposé par Constantin. En ce qui concerne l'affectation du transport en commun, notre algorithme s'appuie sur la méthode développée par Spiess (1984) qui considère des fonctions de coût non linéaires.

Cet article est organisé de la façon suivante : à la section 2 nous faisons un bref rappel des modèles et algorithmes proposés par Spiess et Constantin. La description d'une version simplifiée de notre modèle ainsi que son analyse de sensibilité sont présentées à la section 3. Une version étendue du modèle, qui permet de représenter des réseaux réels, ainsi que son analyse de sensibilité, sont décrites à la section 4. L'algorithme de résolution est exposé à la section 5. Enfin, l'implantation de l'algorithme dans l'environnement du logiciel pour la planification du transport EMME/2 et les résultats numériques sont présentés aux sections 6 et 7 respectivement.

2. Études antérieures

Le modèle d'affectation du transport en commun formulé par Spiess est basé sur le concept de stratégies optimales. Une stratégie consiste de l'ensemble des règles permettant au voyageur d'atteindre sa destination. Plus précisement, soit un réseau de transport en commun constitué d'un ensemble de sommets, un ensemble de lignes de transport en commun (définies comme une suite d'arrêts) ainsi qu'un ensemble de liens de marche, et considérons

ensuite que les voyageurs choisissent leur route de façon à minimiser leur temps espéré de transport (défini comme la somme pondérée des temps espérés de marche, d'attente et à bord du véhicule).

Le mécanisme de déroulement d'un voyage selon une stratégie donnée, est décrit de la manière suivante :

1. Soit O le sommet origine.
2. Embarquer dans le premier véhicule qui arrive parmi les véhicules qui appartiennent aux lignes attrayantes à O.
3. Débarquer au sommet prédéterminé.
4. Si la destination n'est pas encore atteinte, affecter à O, le sommet courant et retourner à l'étape 1. Sinon, le voyage est terminé.

D'autre part, un déplacement par transport en commun est constitué de plusieurs composantes, parmi lesquelles nous retrouvons : l'attente d'un véhicule (embarquement), le déplacement à bord du véhicule, la descente du véhicule et la marche entre deux sommets.

Spiess propose une formulation de réseau généralisé dans laquelle chaque composante d'un voyage inclut un temps de déplacement constant ainsi qu'une distribution du temps d'attente. Les composantes des déplacements correspondent aux liens du réseau généralisé. Il considère en particulier le cas où la distribution du temps d'attente de chaque lien est quantifiée par la fréquence du lien. Ainsi, les liens de marche, les liens de descente et les liens à bord du véhicule ont un temps de déplacement constant et une fréquence infinie (il n'y a pas d'attente) tandis que les liens d'embarquement ont un temps de déplacement nul et une fréquence finie (la fréquence à laquelle le lien est desservi). Un petit réseau généralisé est exposé à la figure 1. Le temps de déplacement et la fréquence associés aux liens sont montrés entre parenthèses.

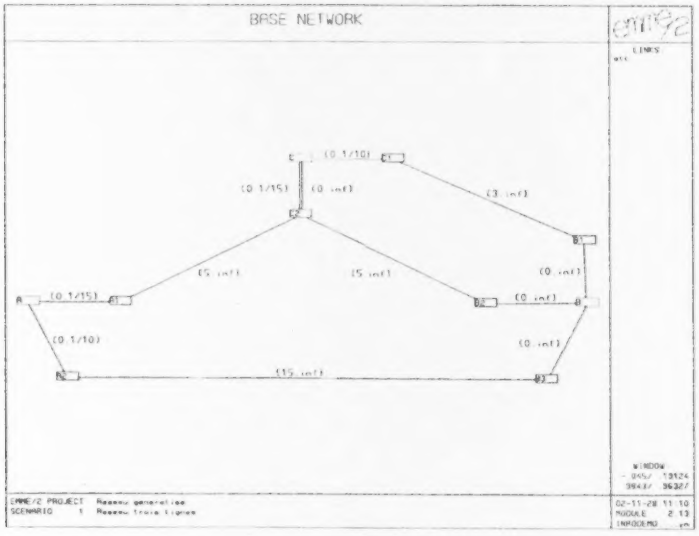

FIG. 1 – Exemple de réseau généralisé.

La notation utilisée est la suivante :

$G = (I, A)$	le réseau généralisé
$i \in I$	sommets du réseau généralisé
$r \in R$	sommet destination
$a \in A$	liens du réseau généralisé
$a \in A_i^+, (a \in A_i^-)$	liens sortant du (entrant au) sommet i
c_a	temps de déplacement sur le lien a
f_a	fréquence du lien a
g_i^r	demande pour aller du sommet i au sommet r
v_a	flot associé au lien a
w_i	temps total d'attente au sommet i

Formellement le modèle d'affectation du transport en commun avec des coûts constants (une destination) se présente de la façon suivante :

$$\min \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} w_i \tag{1}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i \qquad i \in I \tag{2}$$

$$v_a \leq f_a w_i \quad a \in A_i^+, i \in I \tag{3}$$

$$v_a \geq 0 \qquad a \in A \tag{4}$$

Pour plus de précisions quant à la formulation du modèle consulter Spiess (1984) ou Spiess et Florian (1989).

Afin de trouver une solution à ce modèle, Spiess développe un algorithme qui affecte les voyages à partir des sommets d'origine vers un sommet destination. Deux parties composent cet algorithme. Dans la première partie la stratégie optimale et les temps espérés de voyage sont calculés. Dans la deuxième partie, la demande est affectée aux liens selon la stratégie optimale. La solution, obtenue à l'aide de cet algorithme, est une solution optimale du modèle (1)-(4).

La généralisation du modèle au cas de plusieurs destinations est très simple. Quant à la solution de ce nouveau problème, il suffit d'appliquer l'algorithme à chaque destination et d'additionner les volumes ainsi calculés pour obtenir les volumes totaux. Ceci est possible puisque ce dernier problème est séparable selon les destinations.

Spiess étudie aussi le problème d'affectation lorsque les coûts (temps de voyage) c_a ne sont plus constants mais des fonctions continues $c_a(v), a \in A$. Ces fonctions permettent de modéliser différentes situations qui peuvent se présenter dans un réseau de transport en commun, comme par exemple, des effets de congestion. Il montre qu'il existe une formulation d'optimisation convexe pour le problème dans le cas où les fonctions de coût sont croissantes continues et séparables par lien $(c_a(v) = c_a(v_a), a \in A)$.

Le modèle d'affectation du transport en commun avec des fonctions de coût non linéaires (plusieurs destinations) est le suivant :

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} w_i^r$$

sujet à

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A_i^+} v_a^r - \sum_{a \in A_i^-} v_a^r &= g_i^r \quad i \in I, r \in R \\
v_a^r &\leq f_a w_i^r \quad a \in A_i^+, i \in I, r \in R \\
v_a^r &\geq 0 \quad a \in A, r \in R \\
v_a &= \sum_{r \in R} v_a^r \quad a \in A
\end{aligned}$$

Spiess propose de résoudre ce problème avec la méthode d'approximation linéaire de Frank-Wolfe. Il note que l'approximation linéaire de la fonction objectif revient à un problème séparable par destination. En effet, pour chaque destination le sous-problème à résoudre est équivalent au problème d'affectation avec coûts constants (1)-(4). L'algorithme d'affectation du transport en commun avec des fonctions de coût non linéaires se décrit comme suit :

0. *Initialisation*	Trouver une solution réalisable (v^0, w^0), où v^0 dénote le vecteur de volumes totaux v_a, et le scalaire w^0 dénote le temps d'attente associé : $\sum_{i \in I} \sum_{r \in R} w_i^r$. $k \leftarrow 0$.
1. *Sous-problème linéaire*	$k \leftarrow k + 1$. Obtenir $(\hat{v}, \hat{w})$ en résolvant le problème d'affectation de transport en commun avec des coûts constants $c_a = c_a(v_a^{k-1})$.
2. *Recherche unidimensionnelle*	Trouver λ^k qui minimise la fonction objectif du problème avec des fonctions de coût non linéaires sur le segment : $(1 - \lambda^k)(v^{k-1}, w^{k-1}) + \lambda^k(\hat{v}, \hat{w})$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
3. *Mise à jour*	$(v^k, w^k) \leftarrow (1 - \lambda^k)(v^{k-1}, w^{k-1}) + \lambda^k(\hat{v}, \hat{w})$ Si $\|((v^k, w^k) - (v^{k-1}, w^{k-1})\| < \epsilon$ alors, arrêter ; sinon aller à l'étape 1.

Constantin étudie le problème d'optimisation des fréquences d'un réseau de transport en commun avec des coûts constants. (Voir Constantin (1993) et Constantin et Florian (1995)).

Elle formule le problème comme un programme bi-niveau de type Min-Min avec la même fonction objectif aux deux niveaux. Cette fonction minimise le temps de transport de l'ensemble de voyageurs. Le programme extérieur correspond au problème concernant la société de transport qui doit respecter, d'une part, une contrainte sur la taille du parc de véhicules et, d'autre part, des contraintes de bornes sur les fréquences. Le programme intérieur modélise le comportement des voyageurs et correspond au problème d'affectation d'un réseau

de transport en commun avec des fréquences et des coûts constants.

Constantin développe premièrement une version simplifiée du modèle d'optimisation de fréquences dont la formulation est la suivante :

$$\min_{f} \quad \min_{v,w} \quad \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{i \in I} w_i \tag{5}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i \qquad i \in I \tag{6}$$

$$v_a \leq f_a w_i \quad a \in A_i^+, i \in I \tag{7}$$

$$v_a \geq 0 \qquad a \in A \tag{8}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A} c_a f_a \leq N \tag{9}$$

$$f_a \geq \underline{f}_a \qquad a \in A \tag{10}$$

Où $\underline{f}_a$ est la borne inférieure sur la fréquence du lien a, et N est la taille du parc de véhicules. Cette formulation simplifiée considère que chaque ligne de transport en commun ne comporte qu'un seul lien et que le réseau de transport en commun ne comporte qu'une seule destination.

Afin de résoudre ce modèle, Constantin propose d'utiliser la méthode du gradient projeté de Rosen (1960). Cette méthode projette le négatif du gradient sur l'espace de contraintes actives. Toutefois, une difficulté se présente lors de la détermination du gradient. En effet, la fonction objectif du problème interne (dont la solution servira à calculer une direction de descente pour le problème externe) n'est pas continûment différentiable. Ceci mène Constantin à adapter le théorème de Danskin (1967) portant sur les problèmes bi-niveaux de type Max-Min avec la même fonction objectif aux deux niveaux à ce problème bi-niveaux de type Min-Min.

Enfin, une analyse de sensibilité du problème intérieur (versions primale et duale) s'avère nécessaire afin de déterminer les dérivées partielles de ce problème puisque la fonction objectif n'est pas une fonction explicite des fréquences.

La formulation du problème dual du programme interne est la suivante :

$$\max \sum_{i \in I} g_i u_i \tag{11}$$

sujet à

$$u_j + c_a + \mu_a \geq u_i, \quad a = (i,j) \in A \tag{12}$$

$$\sum_{a \in A_i^+} f_a \mu_a = 1 \qquad i \in I \tag{13}$$

$$\mu_a \geq 0 \qquad a \in A \tag{14}$$

Dans le problème bi-niveau qui nous occupe, soit

$$\varphi(f) = \min_{v,w\in\Omega} F(f,v,w) = \min_{v,w\in\Omega} \sum_{a\in A} c_a v_a + \sum_{i\in I} w_i$$

où Ω est l'ensemble défini par les contraintes du problème intérieur, les dérivées partielles de la fonction objectif du problème intérieur sont alors données par :

$$\frac{\partial F(f,v,w)}{\partial f_a} = -\hat{\mu}_a \hat{w}_i, \qquad a \in A_i^+, i \in I \tag{15}$$

où $(\hat{v},\hat{w})$ et $(\hat{u},\hat{\mu})$ sont les solutions optimales des programmes (1)-(4) et (11)-(14), respectivement. La direction de descente pour le programme extérieur est alors déterminée de la manière suivante :

$$d = -\underline{\nabla}\varphi(f) = [d_a, a \in A] = [-\frac{\partial F(f,\hat{v},\hat{w})}{\partial f_a}, \quad a \in A] = \hat{\mu}_a \hat{w}_i, \quad a \in A_i^+, i \in I.$$

Lorsque la contrainte de la taille du parc (programme extérieur) est active, cette direction n'est pas réalisable. Elle doit alors être projetée sur l'espace de contraintes actives. Or, un des avantages du modèle consiste à la possibité de déterminer de façon analytique la direction projetée d ainsi que les multiplicateurs λ.

Soit l'ensemble de contraintes actives :

$$\sum_{a\in A} c_a f_a = N$$

$$-f_a = -\underline{f}_a, \quad a \in \underline{A}$$

La direction projetée du sous-gradient sur l'espace des contraintes actives est :

$$d = [d_a, a \in A] \quad \text{où} \quad d_a = \begin{cases} -\underline{\nabla}\varphi_a - \rho c_a & \text{si } a \notin \underline{A} \\ 0 & \text{si } a \in \underline{A} \end{cases}$$

et les multiplicateurs sont donnés par :

$$\lambda = \begin{cases} \rho \\ \underline{\nabla}\varphi_a + \rho c_a \quad a \in \underline{A} \end{cases}$$

où :

$$\rho = -\frac{\sum_{a'\notin\underline{A}} c_{a'} \underline{\nabla}\varphi_{a'}}{\sum_{a'\notin\underline{A}} c_{a'}^2}$$

L'algorithme d'optimisation des fréquences résout de façon alternative le programme intérieur et le programme extérieur jusqu'à ce qu'un point stationnaire du problème (fort probablement un minimum local) soit trouvé. En ce qui concerne le programme intérieur, il s'agit de résoudre un problème d'affectation de transport en commun avec des coûts constants. En ce qui concerne le programme extérieur, un sous-gradient basé sur la stratégie optimale est calculé. Celui-ci est la base pour la détermination de la direction projetée et les multiplicateurs. Quant aux fréquences, le pas maximal tel que les nouvelles fréquences soient réalisables est d'abord déterminé pour calculer ensuite un pas acceptable (bien que non-optimal) à l'aide de la règle d'Armijo.

Plusieurs extensions sont apportées au modèle simplifié afin de le rendre plus réaliste. Il est important de mentionner que la structure de base du modèle reste inchangée, permettant ainsi l'utilisation de l'algorithme de solution.

3. Le modèle de base et son analyse de sensibilité

Un réseau généralisé du même type que celui proposé par Spiess est considéré.

Le problème est formulé initialement comme un programme bi-niveaux. Le niveau extérieur décrit l'objectif de la société de transport en commun et le niveau intérieur décrit le comportement des voyageurs dans un réseau de transport en commun avec congestion.

La fonction objectif du niveau extérieur sert à minimiser le temps de transport total des voyageurs. La fonction objectif du niveau intérieur, quant à elle, minimise le temps de transport de l'ensemble des voyageurs qui utilisent le réseau de façon individualiste. Ces fonctions considèrent que le temps de déplacement sur chaque lien est une fonction (non-linéaire, non-négative, continue ainsi que non-décroissante) qui dépend du volume sur le lien.

En ce qui concerne le programme de la société de transport nous reprenons les considérations faites par Constantin dans le cadre du modèle sans congestion. Quant au comportement des voyageurs, l'affectation du transport en commun est basée sur des stratégies optimales de choix de routes avec des fonctions de coût non linéaires.

Le modèle de base considère que la demande de transport est positive, en d'autres termes, $g_i > 0$ pour tout $i \in I$; que le réseau de transport en commun ne comporte qu'une destination et que chaque ligne de transport ne contient qu'un seul lien.

Une fonction de coût $c_a(v_a)$ ainsi qu'une fréquence f_a sont associées aux liens. La fonction de coût est définie de la manière suivante :

$$c_a(v_a) = c_a^0(1 + d_a(v_a))$$

où c_a^0 est le temps (constant) de déplacement à bord du véhicule, et $d_a(v_a)$ est la fonction de congestion (qui dépend du volume sur le lien). Cette dernière est une fonction non négative, non décroissante. De plus, $d_a(0) = 0$ pour tout lien a.

Un premier modèle d'optimisation des fréquences est formulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \min_f \quad & \sum_{a \in A} c_a(v_a) v_a + \sum_{i \in I} w_i \\ \text{sujet à} \quad & \text{(9)-(10)} \\ v, w = \ & \operatorname{argmin} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} w_i \\ & \text{sujet à (6)-(8)} \end{aligned}$$

Tel que formulé le problème est difficile à résoudre, c'est pourquoi il est reformulé en approximant la fonction objectif du problème externe par la fonction objectif du problème interne. Ceci permet d'utiliser le théorème de Danskin afin de déterminer une direction de descente pour le problème externe. Le modèle de base devient alors le programme à deux niveaux suivant :

$$\min_{f} \quad \min_{v,w} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} w_i \tag{16}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i \qquad i \in I \tag{17}$$

$$v_a \leq f_a w_i \quad a \in A_i^+, i \in I \tag{18}$$

$$v_a \geq 0 \qquad a \in A \tag{19}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A} c_a^0 f_a \leq N \tag{20}$$

$$f_a \geq \underline{f}_a \qquad a \in A \tag{21}$$

Dont le problème interne est :

$$\min_{v,w} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} w_i \tag{22}$$

sujet à

$$\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a = g_i \qquad i \in I \tag{23}$$

$$-v_a + f_a w_i \geq 0 \quad a \in A_i^+, i \in I \tag{24}$$

$$v_a \geq 0 \qquad a \in A \tag{25}$$

La fonction objectif du programme interne avec des fréquences fixes, est une fonction strictement convexe sur le domaine réalisable du programme intérieur Ω_1. Puisque Ω_1 est un ensemble convexe (ainsi que compact) et que la fonction objectif ainsi que les contraintes du programme interne sont de classe C^1/Ω_1 et convexes sur Ω_1, il s'en suit (d'après les conditions suffisantes de premier ordre de la programmation non linéaire) que, si les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées au point $(v^0, w^0) \in \Omega_1$, alors (v^0, w^0) est un minimum global pour le problème (22)-(25). En plus, la fonction objectif étant strictement convexe, ce minimum global est unique.

La fonction objectif du programme externe est une fonction non linéaire des fréquences, celles-ci étant définies implicitement dans les variables w_i. En plus, elle n'est ni concave ni convexe, c'est pourquoi la solution trouvée pour le problème ne sera qu'un point stationnaire de ce dernier.

D'autre part, en profitant du fait que l'ensemble des solutions du problème interne consiste toujours d'un seul point (une solution optimale unique), nous adaptons la théorie développée par Danskin dans le cadre des problèmes du type Max-Min au cas Min-Min. Il est possible ainsi d'affirmer que la fonction objectif du problème externe est une fonction continûment différentiable par rapport aux fréquences. (Pour plus de détails voir le théorème II dans Danskin (1967)).

D'après le même théorème, la dérivée directionnelle de la fonction objectif du problème externe, φ, dans la direction de γ, peut être calculée de la façon suivante :

$$D_\gamma \varphi(f) = \sum_{a \in A} \gamma_a \frac{\partial \varphi(f)}{\partial f_a}$$

où

$$\varphi(f) = \min_{v,w \in \Omega_1} F(\overline{f}, v, w) = \min_{v,w \in \Omega_1} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} w_i$$

La meilleure direction de descente à utiliser est la direction opposée au gradient, celui-ci s'exprimant comme :

$$\nabla F(f, \hat{v}, \hat{w}) = [\partial F(f, \hat{v}, \hat{w})/\partial f_a, a \in A$$

Cependant, puisque les variables f_a ne sont pas définies explicitement dans la fonction objectif, nous faisons une analyse de sensibilité du programme intérieur ((22)-(25))afin de mesurer l'impact sur la solution optimale des changements produits au niveau des contraintes.

Cette analyse se base sur la théorie développée par Fiacco et McCormick (1968) et Fiacco (1983) dans le cadre de la programmation non linéaire.

Soit le problème de programmation paramétrique suivant :

$$\text{Min } f(x) + \epsilon_0 a_0(x)$$

sujet à

$$\begin{aligned} g_i(x) + \epsilon_i b_i(x) &\geq 0 \quad , i = 1, \ldots, q \\ h_j(x) + (\epsilon_{j+q}) c_j(x) &= 0, j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Le **Théorème de perturbation de l'optimum** (Théorème 6 dans Fiacco (1968)) établit que si

a) les fonctions f, $\{g_i\}$ et $\{h_j\}$ sont deux fois différentiables,

b) les conditions de suffisance de deuxième ordre sont satisfaites à x^*,

c) les gradients $\{\nabla g_i^*\}$ (pour tout $i \in B^*$), $\{\nabla h_j^*\}$, $j = 1, \ldots, p$ sont linéairement indépendants, et

d) il existe la complémentarité stricte en $(n_i^* g_i(x^*) = 0 \qquad i = 1, \ldots, q)$ (i.e., $n_i^* > 0$ pour $g_i(x^*) = 0$),

alors, le changement de la valeur optimale de la fonction objectif $f[x(\epsilon)] - f(x^*)$ est approximée par

$$-\sum_{i=1}^{q} \epsilon_i n_i^* b_i^* + \sum_{j=1}^{p} \epsilon_{(j+q)} m_j^* c_j^*$$

En particulier, quand $*$ dénote l'évaluation en $\epsilon = 0$, on a que

$$\nabla_\epsilon f^*(0) = (a_0^*, -n_1^* b_1^*, \ldots, -n_q^* b_q^*, m_1^* c_1^*, \ldots, m_p^* c_p^*) \quad \diamond \tag{26}$$

Nous analysons l'impact d'une légère modification, ϵ_a, effectuée aux fréquences f_a, $a \in A$. Le problème perturbé est le suivant :

$$\min_{v,w \in \Omega_1} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{i \in I} w_i$$

sujet à

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A_i^+} v_a - \sum_{a \in A_i^-} v_a &= g_i \qquad i \in I \\
-v_a + (f_a + \epsilon_a) w_i &\geq 0 \quad a \in A_i^+, i \in I \\
v_a &\geq 0 \qquad a \in A
\end{aligned}$$

a) les fonctions f, $\{g_i\}$ et $\{h_j\}$ sont deux fois différentiables,

Toutes les dérivées secondes existent, et elles sont toutes nulles à l'exception de :

$$\frac{\partial^2 F(\bar{f}, v, w)}{\partial v_a^2} = c_a^0 d_a'(v_a)$$

b) les conditions suffisantes de deuxième ordre sont satisfaites à x^*,

Les conditions de Kuhn-Tucker du problème (22)-(25) sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{a \in A_i^+} \mu_a f_a &= 0 \qquad i \in I \\
c_a(\hat{v}_a) + u_j - u_i + \mu_a - \delta_a &= 0 \qquad a \in A \\
\mu_a(-\hat{v}_a + f_a \hat{w}_i) &= 0 \qquad a \in A \\
\mu_a &\geq 0 \qquad a \in A \\
\delta_a \hat{v}_a &= 0 \qquad a \in A \\
\delta_a &\geq 0 \qquad a \in A \\
(23) \quad \text{à} \quad (25)
\end{aligned}$$

où les variables duales u_i, u_j sont associées aux contraintes de conservation du flot (23), les variables duales μ_a sont associées aux contraintes de répartition du flot (24) et les variables duales δ_a sont associées aux contraintes de non négativité (25).

Le Hessien du Lagrangien est une matrice semi-définie positive qui prend la forme suivante :

$$\nabla^2 L(v, w, u, \mu, \delta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c_a^0 d_a'(v_a)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ceci implique que $y^T[\nabla^2 L(v^*, w^*, u^*, \mu^*, \delta^*)]y > 0$ pour tout $y \neq 0$.
Puisque le problème (22)-(25) est stable, son domaine réalisable est un ensemble convexe et la fonction objectif ainsi que les contraintes sont des fonctions convexes sur le domaine réalisable, alors le Théorème de dualité forte en programmation non-linéaire permet d'affirmer que le dual Lagrangien de ce problème possède une solution optimale dont la valeur est égale à la valeur optimale du problème (22)-(25) (pour l'enoncé précis du théorème voir Ferland (1980)). Ainsi, les variables duales u^*, μ^* et δ^* (tels que $(v^*, w^*, u^*, \mu^*, \delta^*)$ satisfait

les conditions de Kuhn-Tucker) existent et les conditions suffisantes de deuxième ordre sont donc satisfaites.

c) Les gradients $\{\nabla g_i^*\}$, $\{\nabla h_j^*\}$ des contraintes actives sont linéairement indépendants.

Parmi les contraintes de conservation du flot il y en a toujours une qui est redondante, linéairement dépendante et qui peut, par conséquent, être supprimée. D'autre part, pour chaque lien $a \in A$ il y a à l'optimum une seule contrainte active. En effet, ou bien $\hat{v}_a = 0$, ou bien $\hat{v}_a = f_a \hat{w}_i$.

En ce qui concerne les contraintes actives de conservation du flot (du type 23) et de non-négativité (du type 25), leurs gradients ne seraient linéairement dépendants que si toutes les contraintes $\hat{v}_a \geq 0, \quad a \in A_i^+$ étaient actives à l'optimum. Ce cas ne se présente pas puisque le modèle de base suppose que $g_i > 0, \quad \forall i \in I$, ce qui implique que $\hat{v}_a > 0$ pour au moins un lien $a \in A_i^+$. Pour ce qui est des contraintes actives de répartition du flot (du type 24), la dépendance linéaire de leurs gradients ne se présente pas puisque ce sont les seules contraintes qui incluent des variables w_i (de plus, les coefficients des variables v_a sont négatifs). Par conséquent, les gradients de contraintes actives à l'optimum sont linéairement indépendants.

d) Il existe la complémentarité stricte en $(n_i^* g_i(x^*) = 0 \qquad i = 1, \ldots, q)$.

Les contraintes de complémentarité du problème (22)-(25) sont les suivantes :

$$\delta_a v_a = 0 \qquad a \in A \tag{27}$$

$$\mu_a(-v_a + f_a w_i) = 0 \qquad a \in A \tag{28}$$

Preuve de (27) :

La complémentarité stricte implique que pour $a \in A$:

$$\hat{v}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta}_a > 0$$

Soit $\bar{A}$ la stratégie optimale (qui est en fait la combinaison linéaire convexe de plusieurs stratégies). D'une part, si $a \notin \bar{A} \quad \Rightarrow \hat{v}_a = 0$. D'autre part, si $a \in \bar{A}$, la façon de calculer v_a dans l'algorithme d'affectation est la suivante :

$$\hat{v}_a = \frac{f_a}{f_i} V_i,$$

Dans ce cas $\hat{v}_a > 0$. En effet, $V_i > 0$ puisque $g_i > 0$ pour tout $i \in I$; $f_a > 0$; et $f_i = \sum_{a \in \bar{A}_i^+} f_a < \infty$ puisque les fréquences considérées ont toujours des valeurs finies.
Alors, $\hat{v}_a = 0$ si et seulement si $a \notin \bar{A}$.
Pour les liens $a \notin \bar{A}$, nous avons que $\hat{u}_j + c_a(\hat{v}_a) > \hat{u}_i$.
Donc,

$$\hat{v}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta}_a = c_a(\hat{v}_a) + \hat{u}_j - \hat{u}_i + \hat{\mu}_a > 0 \qquad \diamond$$

Preuve de (28) :

La complémentarité stricte implique que pour $a \in A$:

$$\hat{v}_a = f_a \hat{w}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_a > 0$$

Nous avons que :

$$\hat{v}_a = f_a \hat{w}_i \quad (\hat{v}_a > 0) \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_a = \hat{u}_i - \hat{u}_j - c_a(\hat{v}_a)$$

Comme tout lien a implique une attente (avec $f_a < \infty$), alors,

$$\hat{u}_i > \hat{u}_j + c_a(\hat{v}_a) \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_a > 0$$

Ceci implique que pour les liens du modèle de base (avec des fréquences finies),

$$\hat{v}_a = f_a \hat{w}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_a > 0 \qquad \diamond$$

Puisque toutes les conditions du Théorème de perturbation de l'optimum sont satisfaites, le résultat (26) peut être utilisé pour calculer le gradient de la fonction objectif du problème interne et, par conséquent, une direction de descente pour le problème externe.

La direction de descente pour le problème externe est alors donnée par :

$$\gamma = -\nabla\varphi(f) = [\hat{\mu}_a \hat{w}_i, \quad a \in A_i^+, i \in I]$$

Notons que les dérivées partielles $\partial F(f, \hat{v}, \hat{w})/\partial f_a$ se calculent exactement de la même façon que dans le cas de l'optimisation des fréquences sans congestion. (Équation (15)).

4. Le modèle étendu

Nous empruntons les extensions proposées par Constantin (1993) dans le cadre du modèle d'optimisation des fréquences sans congestion. Celles-ci considèrent que les lignes de transport en commun sont composées de plusieurs liens, que les fréquences sont bornées supérieurement, que le réseau de transport en commun comporte de multiples destinations et que le parc de véhicules de transport en commun utilise plusieurs types de véhicules.

Notre modèle étendu est alors formulé de la façon suivante :

$$\min_{f} \quad \min_{v,w} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} w_i^r$$

sujet à

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A_i^+} v_a^r - \sum_{a \in A_i^-} v_a^r &= g_i^r \qquad i \in I, r \in R \\
v_a^r &\leq (\sum_{l \in L} \delta_{al} f_l) w_i^r \quad a \in A_i'^+, i \in I, r \in R \\
v_a^r &\geq 0 \qquad a \in A, r \in R \\
\text{avec} \quad v_a &= \sum_{r \in R} v_a^r \qquad a \in A
\end{aligned} \tag{29}$$

sujet à

$$\sum_{l \in L_\nu} c_l^0 f_l \leq N_\nu \qquad \nu \in \mathcal{V} \tag{30}$$

$$f_l \geq \underline{f}_l \qquad l \in L_\nu, \nu \in \mathcal{V} \tag{31}$$

$$f_l \leq \overline{f}_l \qquad l \in L_\nu, \nu \in \mathcal{V} \tag{32}$$

Où :

• Les nouvelles variables de décision pour le problème externe sont les fréquences des lignes de transport : f_l.
• La fréquence d'un lien d'embarquement est donnée par :

$$f_a = \sum_{l \in L} \delta_{al} f_l, \quad a \in A'$$

où

$$\delta_{al} = \begin{cases} 1 & \text{si le lien } a \text{ appartient à la ligne } l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Seules les fréquences finies associées à ces liens sont sujettes à l'optimisation ($A' \subset A$ est le sous-ensemble des liens d'embarquement).
• Le temps de parcours d'une ligne est déterminé par :

$$c_l^0 = \sum_{a \in A} \delta_{al} c_a^0, \quad l \in L$$

• $\overline{f}_l$ est la borne supérieure sur la fréquence f_l.
• $\mathcal{V}$ représente l'ensemble de types de véhicules, et L_ν le sous-ensemble de lignes qui utilisent le véhicule ν. La taille du parc de chaque type de véhicule est dénotée par N_ν.
• La fonction de coût $c_a(v_a)$ est définie de la même façon que pour le modèle de base à la différence qu'elle tient compte de $v_a = \sum_{r \in R} v_a^r, \quad a \in A$.

La nature de ce modèle permet toujours d'appliquer le théorème de Danskin afin de déterminer une direction de descente pour le problème extérieur. À ce propos, nous effectuons une analyse de sensibilité du programme intérieur. L'analyse de sensibilité consiste à perturber d'une petite quantité ϵ_l les fréquences des lignes f_l, pour observer ensuite le changement produit au niveau de la fonction objectif. Le programme intérieur, objet de l'analyse étant défini comme :

$$\min_{v,w} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{v_a} c_a(x)dx + \sum_{r \in R} \sum_{i \in I} w_i^r$$

sujet à

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A_i^+} v_a^r - \sum_{a \in A_i^-} v_a^r &= g_i^r \qquad i \in I, r \in R \\ v_a^r &\leq (\sum_{l \in L} \delta_{al} f_l) w_i^r \quad a \in A_i^{'+}, i \in I, r \in R \\ v_a^r &\geq 0 \qquad a \in A, r \in R \end{aligned} \tag{29}$$

Seules les contraintes de répartition du flot sont perturbées puisque les variables f_l n'apparaissent que dans celles-ci. Formellement, la perturbation s'exprime par :

$$v_a^r \leq (f_l + \epsilon_l) w_i^r \quad a \in A_i^{'+}, i \in I, r \in R \quad \text{si } \delta_{al} = 1$$

Nous vérifions que les conditions du Théorème de Perturbation de l'optimum sont respectées.

En ce qui concerne les conditions **a).** (La fonction objectif et les contraintes sont deux fois différentiables), **b).** (Les conditions de suffisance de deuxième ordre sont satisfaites au point $(\hat{v}_a^r, \hat{w}_i^r)$) et **d)** (Complémentarité stricte) ; nous ne présentons pas les preuves puisqu'elles se calquent sur celles développées pour le modèle de base.

Reste à vérifier la condition **c)** (Les gradients des contraintes actives à l'optimum sont linéairement indépendants).

Les contraintes du problème interne étant séparables par destination ; il suffit alors de vérifier que, pour une destination donnée, les gradients des contraintes actives à l'optimum sont linéairement indépendantes. Pour la destination $\bar{r}$ les contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A_i^+} v_a^{\bar{r}} - \sum_{a \in A_i^-} v_a^{\bar{r}} &= g_i^{\bar{r}} \qquad i \in I \\ v_a^{\bar{r}} &\leq (\sum_{l \in L} \delta_{al} f_l) w_i^{\bar{r}} \quad a \in A_i'^+, i \in I \\ v_a^{\bar{r}} &\geq 0 \qquad a \in A \end{aligned}$$

Il n'y a pas de dépendance linéaire avec les gradients des contraintes de répartition de flot puisque ce sont les seules contraintes qui incluent les variables $w_i^{\bar{r}}$. Quant aux contraintes de non-négativité et celles de conservation du flot une remarque s'impose.

En effet, pour le modèle étendu, l'indépendance linéaire se perd dans le cas, par exemple, où plusieurs lignes assurent le transport entre deux sommets, mais une seule parmi elles est utilisée. Cela est dû au fait qu'il peut y avoir des sommets intermédiaires avec demande nulle, ce qui engendrerait suffisamment de contraintes de non-négativité actives pour générer la dépendance linéaire. Toutefois, ce cas ne se présenterait que très rarement, puisque pour des réseaux congestionnés la solution optimale consiste en une combinaison linéaire convexe de stratégies pour laquelle les voyageurs sont répartis parmi les lignes de transport en commun disponibles de façon telle qu'ils éprouvent le minimum d'inconfort.

Par ailleurs, une façon de contourner cette situation consiste à remplacer les contraintes actives de non-négativité, correspondant aux liens provenant des sommets avec demande nulle, par les contraintes de répartition de flot correspondant à ces liens. Ce remplacement est possible lorsque la demande au sommet i est nulle et que par conséquent, le temps d'attente $w_i^{\bar{r}}$ est également nul. Une contrainte de répartition de flot est ainsi retenue en remplacement d'une contrainte de non-négativité.

Une fois les conditions du Théorème de perturbation de l'optimum vérifiées, il peut être appliqué pour la détermination d'une direction de descente pour le programme externe du modèle étendu. Le changement de la valeur optimale de la fonction objectif suite à la perturbation de la fréquence f_l est donné par :

$$-\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} \sum_{a \in A_i'^+} \delta_{al} \hat{\mu}_a^r \hat{w}_i^r$$

Et la direction de descente pour le problème externe est donc donnée par :

$$\gamma = -\nabla \varphi(f) = [\sum_{r \in R} \sum_{i \in I} \sum_{a \in A_i'^+} \delta_{al} \hat{\mu}_a^r \hat{w}_i^r, \quad l \in L]$$

Les dérivées partielles $\partial F(f, \hat{v}, \hat{w})/\partial f_l$ du modèle étendu se calculent toujours de la même manière que dans le cas de l'optimisation des fréquences sans congestion.

5. L'algorithme de résolution

Puisque la nature de notre modèle ainsi que la manière de calculer des dérivées partielles pour le problème externe, sont similaires à celles du modèle d'optimisation des fréquences d'un réseau de transport en commun sans congestion, nous reprenons et adaptons à notre contexte, l'algorithme de résolution proposé par Constantin.

L'algorithme est du genre itératif et se base sur la méthode du gradient projeté de Rosen (1960). Il projette le négatif du gradient sur l'espace de contraintes actives, de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif tout en demeurant dans le domaine réalisable, jusqu'à ce qu'un point stationnaire du problème soit trouvé.

L'algorithme d'optimisation de fréquences d'un réseau de transport en commun avec congestion est décrit comme :

0. *Initialisation*	Détermination d'un ensemble de fréquences réalisables f^0. Faire $k = 0$.
1. *Direction de descente*	Résolution du problème d'affectation de transport en commun avec des fonctions de coût non-linéaires, la solution optimale étant $\hat{v}(f^k), \hat{w}(f^k)$. Calcul du gradient de la fonction basé sur la stratégie optimale : $\nabla(f^k, \hat{v}(f^k), \hat{w}(f^k))$. Calcul de la direction projetée : $d^k = -P^k \nabla(f^k, \hat{v}(f^k), \hat{w}(f^k))$. Si $\|d^k\| > \epsilon_0$ aller à l'étape 2, sinon aller à l'étape 3.
2. *Mise à jour des fréquences*	Calcul du pas maximal : $\bar{\alpha}^k$. Calcul d'un pas acceptable : $0 \leq \hat{\alpha}^k \leq \bar{\alpha}^k$ à l'aide de la règle d'Armijo. Mise à jour des fréquences : $f^{k+1} = f^k + \hat{\alpha}^k d^k$. Mise à jour du compteur d'itérations : $k = k + 1$, Retour à l'étape 1.
3. *Évaluation du critère d'arrêt*	Calcul des multiplicateurs associés aux contraintes actives : λ^k. Si $\lambda^k \geq 0$ alors les fréquences f^k correspondent à un point stationnaire : arrêt. sinon, désactivation de la contrainte du multiplicateur négatif le plus petit, mise-à-jour de la direction projetée : $d^k = -P'^k \nabla(f^k, \hat{v}(f^k), \hat{w}(f^k))$ et retour à l'étape 2.

En ce qui respecte la résolution du problème d'affectation de transport en commun, l'algorithme d'affectation développé par Spiess (1984) qui considère des fonctions de coût non-

linéaires est utilisé. Pour plus de détails sur les différentes étapes de l'algorithme d'optimisation des fréquences voir Noriega (2000) et Constantin (1993).

6. Implantation de l'algorithme

L'algorithme est implanté sous la forme d'une macro dans l'environnement du logiciel EMME/2 (Équilibre Multimodal - Multimodal Equilibrium /2). Ce logiciel, spécialisé dans la planification du transport urbain multimodal, offre en effet, la possibilité de faire des affectations d'équilibre pour le transport en commun. L'algorithme d'affectation de transport en commun implanté en EMME/2 s'appuie sur le concept des stratégies optimales décrit à la section 1.

Au moment de l'implantation sur EMME/2, nous apportons deux simplifications au problème externe du modèle étendu. La première consiste à considérer dès le début que les contraintes sur la taille du parc sont des égalités ; la deuxième consiste à considérer la même borne supérieure et la même borne inférieure pour toutes les fréquences des lignes. Ainsi, les contraintes de la société de transport (30)-(32), qui sont d'ailleurs séparables par type de véhicule, deviennent alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{l \in L_\nu} c_l^0 f_l &= N_\nu \qquad \nu \in \mathcal{V} \\ f_l &\geq \underline{f} \qquad l \in L_\nu, \nu \in \mathcal{V} \\ f_l &\leq \overline{f} \qquad l \in L_\nu, \nu \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

Une simplification est faite au niveau du problème interne : seules les fonctions de congestion du type BPR ($d_a(x) = \beta \left(\frac{x}{k}\right)^\alpha$) sont traitées par la macro.

L'algorithme de solution, tel que décrit à la section 5, est implanté dans la macro OPTFRE. Sommairement, les étapes de OPTFRE sont les suivantes :

1. Faire l'affectation initiale pour calculer le temps de voyage sans congestion.
2. Calculer les valeurs préliminaires.
3. Initialiser le compteur d'itérations.
4. Faire l'affectation de transport en commun avec des fonctions de coût non linéaires et calcul du gradient, à l'aide de CONGTRA4.
5. Normaliser le gradient, initialiser les attributs et initialiser le compteur de types de véhicules .
6. Déterminer la direction projetée. Si la direction projetée est nulle aller à l'étape 7 ; sinon, aller à l'étape 8.
7. Calculer les multiplicateurs. S'il y en a au moins un qui est négatif, relâcher une contrainte et calculer la nouvelle direction projetée.
8. Si le nombre maximal de types de véhicules utilisés n'est pas encore atteint, augmenter le compteur correspondant et aller à 6.
9. Vérifier si la solution est un point stationnaire, si c'est le cas, aller à 15.
10. Normaliser la direction projetée.
11. Pour tous les types de véhicules, calculer le pas maximal.
12. Calculer l'alpha maximal global.
13. Calculer un pas acceptable à l'aide de la règle d'Armijo. S'il est trop petit, aller à 15.

14. Mettre à jour les fréquences et augmenter le compteur d'itérations. Aller à 4.
15. Présenter le message d'arrêt du programme et/ou les résultats finals.

À l'étape 4, OPTFRE fait appel à la macro CONGTRA4 pour faire les affectations de transport en commun avec des coûts non-linéaires. CONGTRA4 est la version modifiée de CONGTRAS qui permet d'intégrer cette dernière à notre méthode de solution.

En effet, la macro CONGTRAS (CONGested TRansit ASignment) développée par Heinz Spiess implante en EMME/2 l'algorithme d'affectation de transport en commun avec des fonctions de coût non-linéaires. À chaque itération CONGTRAS détermine la solution du sous-problème linéaire en utilisant la méthode d'affectation avec coûts constants implantée en EMME/2.

CONGTRA4, quant à elle, incorpore les commandes pour récupérer les valeurs nécessaires pour le calcul de la direction de descente du problème externe. CONGTRA4 utilise le module non standard 5.32 de EMME/2 (plutôt que le module 5.31) pour faire les affectations du transport en commun. Ce module, en plus de faire l'affectation de voyages, calcule le gradient de la fonction objectif du problème interne et le sauvegarde dans la base de données en utilisation. Le module 5.32 a été développé par Isabelle Constantin.

Pour plus de précisions sur CONGTRAS, consulter Spiess (1991) ainsi que Spiess (1993), et pour plus de détails sur les macros CONGTRA4 et OPTFRE se référer à Noriega (2000) (annexes A et B respectivement).

7. Résultats numériques

OPTFRE est testé sur deux réseaux. Le réseau de transport en commun de la ville de Winnipeg (Canada), qui éprouve une légère congestion, et celui de la ville de Stockholm (Suède), qui connaît une congestion moyenne.

Dans le tableau 1 sont répertoriées les tailles et caractéristiques des deux réseaux. Des détails sur les véhicules des lignes de Transport en Commun (TC) sont présentés dans le tableau 2. Enfin, les schémas des réseaux sont montrés dans les figures 2 et 3.

Élément	Winnipeg	Stockholm
Zones	154	185
Sommets réguliers	903	395
Liens	2975	2079
Longueur totale des liens	1161.77	854.76
Modes de TC	1	4
Types de véhicules de TC	2	6
Lignes de TC	133	38
Segments de TC	4205	1058

TAB. 1 – Taille des réseaux.

Il est nécessaire de déterminer des valeurs adéquates de β et α, paramètres de la fonction de congestion BPR, de sorte que la congestion soit suffisamment pénalisée, sans pour autant nous empêcher de trouver une solution d'équilibre du problème dans un temps raisonnable.

Les résultats de l'exécution de CONGTRA4 avec différents paramètres β et α sont montrés au tableau 3. Quelques combinaisons de ces paramètres sont choisies et numérotées aux co-

Winnipeg				
Numéro	Mode TC	Description	Taille du parc	Capacité
1	b (bus)	Autobus	424	51/60
2	b (bus)	Orion	22	31/37
Stockholm				
Numéro	Mode TC	Description	Taille du parc	Capacité
1	b (buss)	stadsbuss	165	45/70
2	b (buss)	normalbuss	10	50/70
3	b (buss)	ledbuss	22	75/120
4	t (t-banna)	tunnelbana	59	75/225
5	p (p-tog)	lokaltog	5	100/220
6	d (diverse)	diverse	5	50/70

TAB. 2 – Types de véhicules.

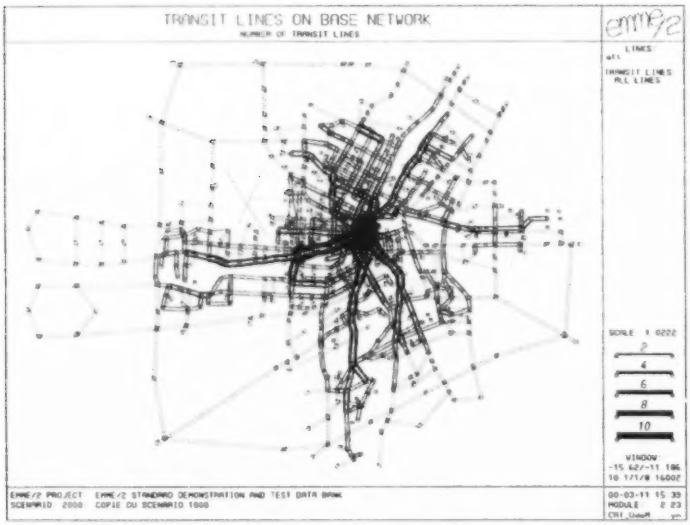

FIG. 2 – Le réseau de transport en commun de Winnipeg.

lonnes FC du tableau 3.

En ce qui concerne les fréquences initiales, trois ensembles de fréquences de départ ont été choisis : les fréquences originales (l'ensemble de fréquences qui se trouvent déjà dans la base de données de chaque réseau), des fréquences égales (pour chaque type de véhicule les fréquences sont fixées à la même valeur) et le même nombre de véhicules (le même nombre de véhicules est affecté à chaque ligne qui utilise un type donné de véhicule, et les fréquences sont déterminées en conséquence).

La demande totale à affecter pour Winnipeg est de 18,210.55 voyages, et de 107,268 voyages pour Stockholm.

Enfin, les tableaux 4 et 5 exposent les résultats de l'optimisation des fréquences des réseaux de TC de Winnipeg et de Stockholm, respectivement. La valeur de la fonction objectif et du temps de transport moyen diminuent avec l'optimisation. Pour le cas de Stockholm, ce décroissement est illustré dans les figures 4 et 5. La valeur de la fonction objectif et celle

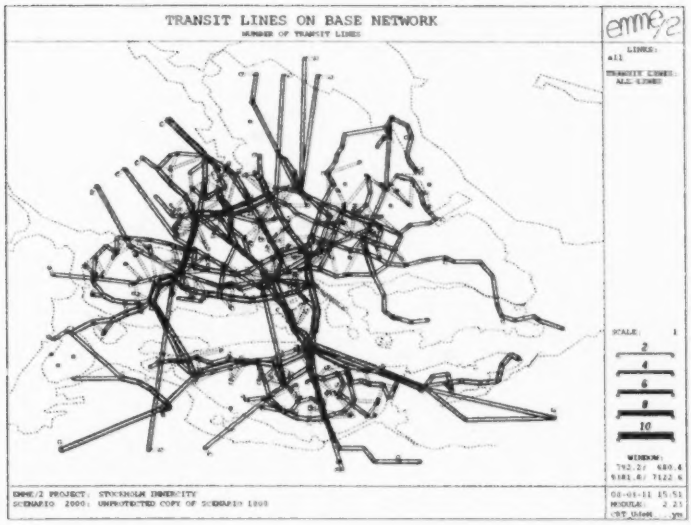

FIG. 3 – Le réseau de transport en commun de Stockholm.

Paramètres		Winnipeg				Stockholm			
Poids (β)	Exposant (α)	Itér.	GAP norm.	T. moyen	FC	Itér.	GAP norm.	T. moyen	FC
				34.79				44.54	
0.15	1	7	0.008	37.38		3	0.009	49.48	
0.15	2	19	0.005	37.50		14	0.007	58.96	
0.15	3	31	0.009	37.65		38	0.008	100.42	4
0.15	4	48	0.009	37.85	1	50	53.45	305.88	
0.50	1	32	0.008	41.95		11	0.009	60.47	
0.50	2	48	0.009	40.91		36	0.001	89.46	3
0.50	3	50	0.030	40.42	2	50	2.140	226.09	
1.00	1	-	-	-		24	0.008	75.51	
1.00	2	-	-	-		50	0.046	131.52	
1.00	3	-	-	-		50	19.49	363.47	

TAB. 3 – Les paramètres pour la fonction de congestion.

du temps de transport moyen, convergent vers des valeurs très raprochées pour les trois ensembles de fréquences initiales.

Le tableau 6 correspond au cas de Stockholm. Dans ce tableau sont listés les intervalles de passage correspondants aux trois types de fréquences initiales ainsi que les intervalles obtenus à la suite de l'optimisation. Indépendamment de l'intervalle de passage initial, l'optimisation a tendance à produire des intervalles semblables, ce qui s'illustre par le nuage de points de la figure 6. (Note : une valeur de la fonction objectif accompagnée d'une étoile signifie qu'un point stationnaire a été trouvé.)

Conclusion

Le fait d'inclure un terme de pénalité de congestion à l'intérieur de la fonction objectif du problème permet d'affecter les voyages d'une façon réaliste et d'ajuster les fréquences de

Fréquences originales					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONGTRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	481,932.69	37.88	30	1	
1	453,067.19	35.86	18	1	
2	450,199.94	35.62	24	1	
3	448,145.78	35.44	20	-	1055 sec.
Fréquences égales					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONGTRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	466,718.59	37.52	27	1	
1	435,435.19	34.56	10	1	
2	433,392.78	34.36	12	1	
3	431,232.34	34.16	10	-	688 sec.
Même nombre de véhicules					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONGTRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	464,288.56	37.44	30	1	
1	460,329.81	36.97	30	1	
2	455,006.53	36.35	18	1	
3	451,882.69	36.00	21	1	
4	450,166.75	35.84	17	1	
5	448,389.09	35.61	30	1	
6	443,739.59	35.07	20	-	1739 sec.

TAB. 4 – Réseau de TC de Winnipeg. F. Cong. 1.

manière telle que les passagers éprouvent moins d'inconfort. Nous le constatons par la diminution de la valeur de la fonction objectif à la suite de l'optimisation des fréquences.

Le temps d'exécution de la macro OPTFRE (qui dépend principalement du temps d'exécution de CONGTRA4) est tout à fait négligeable lorsque l'algorithme est utilisé pour la planification à moyen ou long terme.

Les résultats sont sensibles au choix des paramètres. En particulier, une analyse approfondie des valeurs des paramètres à utiliser dans la fonction de congestion serait conseillée. De même, le choix de la solution initiale constitue un autre facteur influençant la solution du problème et il serait souhaitable d'exécuter l'algorithme avec d'autres ensembles initiaux.

Remerciements

L'élaboration de ce document a été possible grâce à une subvention individuelle du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG).

Bibliographie

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. et Shetty, C. M. (1993). Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 2nd. edition. John Wiley and Sons, Inc.

Chao, G. et Friez, T. (1984). Spatial price equilibrium sensitivity analysis. Transportation Research B, Vol. 18B, No. 6, p. 423-440.

Constantin, I. (1993). L'optimisation des fréquences d'un réseau de transport en commun. Ph.D. thesis, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Montreal (Canada), Publication 881.

Constantin, I. et Florian, M. (1995). Optimizing Frequencies in a Transit Network : a Nonlinear Bi-level Programming Approach. Int. Trans. Opl. Res., Vol. 2, No. 2, p. 149-164.

Danskin, J. M. (1967). The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems. Econometrics and Operations Research V, Springer-Verlag.

Fiacco, A. et McCormick, G. (1968). Non linear programming : Sequential unconstrained minimization techniques. John Wiley and Sons Inc.

Fréquences originales					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONG TRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	3,602,728.25	89.46	30	1	
1	3,544,354.50	87.86	30	1	
2	3,479,827.50	86.20	28	1	
3	3,452,600.50	85.50	30	1	
4	3,438,568.25	85.14	30	1	
5	3,420,037.25	84.65	30	2	
6	3,416,905.50	84.53	27	1	
7	3,403,155.75	84.16	30	1	
8	3,387,619.50	83.77	30	2	
9	3,386,014.75	83.66	28	1	
10	3,384,767.75	83.64	30	2	
11	3,381,271.00	83.57	30	7	
12	3,381,116.00	83.56	28	5	
13	3,381,080.50*	83.55	29	-	5,181 sec.
Fréquences égales					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONGTRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	4,090,491.50	107.43	30	1	
1	3,740,436.00	93.89	30	1	
2	3,405,881.25	84.44	25	1	
3	3,404,798.25	84.36	19	2	
4	3,404,421.25	84.36	28	-	1,346 sec.
Même nombre de véhicules					
Itération	Fonction objectif	Temps de transport moyen	It. CONGTRA4	It. Armijo	Temps calcul
0	4,230,995.50	112.75	30	1	
1	3,798,142.25	96.24	30	1	
2	3,502,254.00	87.59	29	1	
3	3,482,537.00	86.98	23	1	
4	3,473,794.50	86.76	25	1	
5	3,445,148.00	85.82	27	1	
6	3,403,588.50	84.39	23	4	
7	3,401,662.25	84.31	24	4	
8	3,400,012.75	84.25	26	4	
9	3,399,511.25	84.24	27	1	
10	3,397,380.25	84.06	26	1	
11	3,394,936.25	83.89	28	3	
12	3,393,725.50	83.88	26	1	
13	3,391,392.25*	83.79	26	-	4,241 sec.

TAB. 5 – Réseau de TC de Stockholm. F. Cong. 3.

Fiacco, A. (1983). Introduction to sensitivity and stability analysis in non linear programming. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 165, Academic Press.

Frank, M. et Wolfe, P. (1956). An Algorithm for Quadratic Programming. Naval Research Logistics Quarterly 3, p.95-110.

INRO Consultants Inc. (1998). EMME/2 User's Manual. Release 9.

Luenberger, D. G. (1989). Linear and Nonlinear Programming. 2nd. edition. Addison-Wesley.

Noriega, Y. (2000). L'optimisation des fréquences d'un réseau de transport en commun avec congestion. Mémoire de maîtrise, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, Montreal (Canada).

Rosen, J. B. (1960). The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints. SIAM J. Applied Mathematics, Vol. 8, No. 1, p. 181-217.

Schéele, S. (1977). A mathematical programming algorithm for optimal bus frequencies. Ph.D. thesis, Linköping Institute of Technology, Linköping (Sweden).

Spiess, H. (1984). Contributions à la théorie et aux outils de planification des réseaux de transport urbain. Ph.D. thesis, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Montreal (Canada), Publication 382.

Spiess, H. et Florian, M. (1989). Optimal strategies : A new assignment model for transit networks. Transportation Research B, Vol. 23B, No. 2, p. 83-102.

Spiess, H. (1991). CONGTRAS. A Macro for Congested Transit Equilibrium Assignment with EMME/2. INRO Consultants Inc. Montreal (Canada).

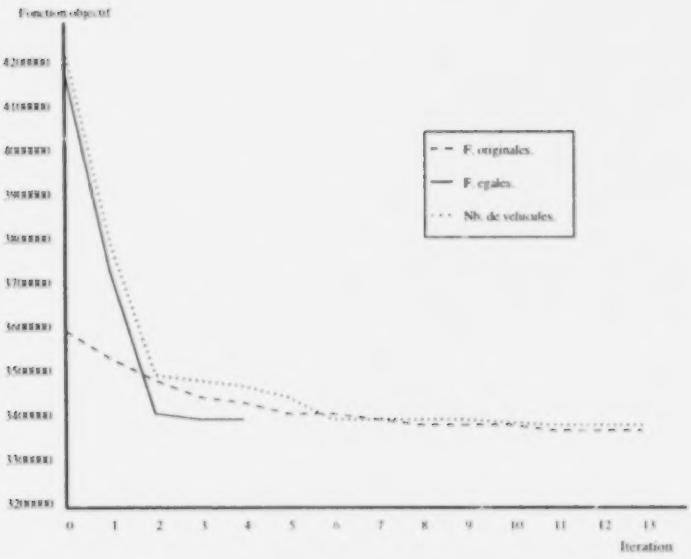

FIG. 4 – Comparaison de la valeur de la F. objectif selon les différentes fréquences initiales. Stockholm. F. Cong. 3.

Spiess, H. (1993). Transit Equilibrium Assignment based on Optimal Strategies : An Implementation in EMME/2. EMME/2 Support Center. Aegerten (Switzerland).
Tobin, R. L. et Friesz T. L. (1988) Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow. Transportation Science, Vol. 22, No. 4, p. 242-250.

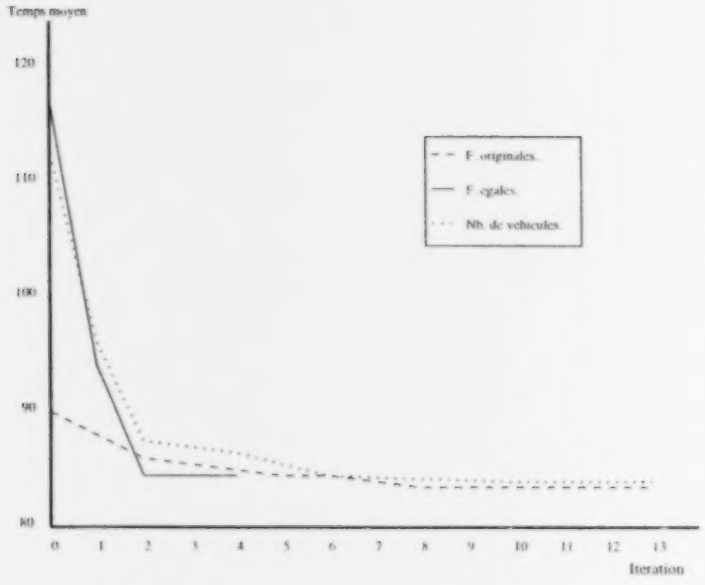

FIG. 5 – **Comparaison du temps de transport moyen selon les différentes fréquences initiales. Stockholm. F. Cong. 3.**

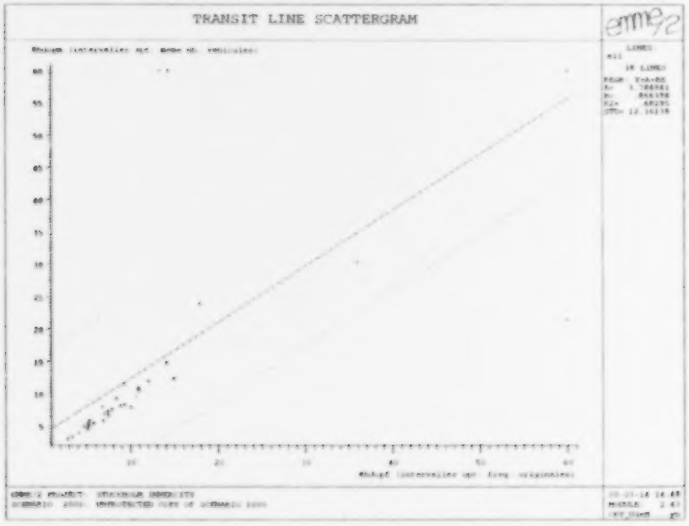

FIG. 6 – **Comparaison des fréquences optimisées.**

Ligne	Fréquences originales		Fréquences égales		Même nb. de véhicules	
	Sans opt.	Opt.	Sans opt.	Opt.	Sans opt.	Opt.
tb1	3.00	3.31	4.12	3.10	5.29	3.34
tb2	5.00	5.14	4.12	5.77	4.41	5.35
tb3	5.00	5.03	4.12	5.20	2.71	4.78
tb4	5.00	4.05	4.12	4.04	4.07	3.97
041	5.00	5.32	8.20	6.03	10.00	5.09
042	11.00	13.28	8.20	9.32	8.53	60.00
043	13.00	10.02	8.20	6.94	9.20	7.92
044	7.00	5.77	8.20	6.46	8.27	5.44
046	6.00	6.70	8.20	8.78	8.80	7.96
047	8.00	6.98	8.20	7.58	8.53	6.87
048	4.00	4.66	8.20	5.59	11.20	4.91
049	13.00	6.85	8.20	6.99	6.93	5.79
051	20.00	60.00	8.20	11.86	2.67	60.00
052	8.00	7.43	8.20	8.32	7.47	6.65
053	10.00	10.87	8.20	10.49	13.33	10.58
054	6.00	5.09	8.20	5.88	13.60	4.54
055	15.00	7.43	8.20	9.14	13.87	7.22
056	5.00	5.31	8.20	6.84	4.00	5.76
058	60.00	60.00	8.20	60.00	8.00	60.00
059	10.00	60.00	8.20	8.50	9.33	60.00
060	20.00	8.86	8.20	8.48	2.67	8.10
062	7.00	9.21	8.20	10.88	9.33	11.45
066	9.00	9.30	8.20	9.30	10.80	8.30
069	12.00	14.91	8.20	13.06	4.80	12.34
165	6.00	60.00	10.30	14.18	5.39	21.51
400	5.00	3.87	10.30	3.24	7.49	3.05
501	30.00	60.00	10.30	60.00	17.96	60.00
507	12.00	10.63	14.18	8.94	13.08	9.61
515	12.00	60.00	14.18	59.02	16.35	60.00
526	15.00	8.37	14.18	9.84	16.35	9.30
54x	10.00	14.29	8.20	9.43	5.87	60.00
56x	12.00	17.85	8.20	9.74	3.20	23.83
726	15.00	35.94	14.18	34.80	16.35	30.29
nrr	15.00	7.87	14.18	7.36	8.17	7.63
pen	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00	12.00
ros	12.00	10.87	16.60	10.87	19.20	10.87
sal	35.00	60.00	16.60	60.00	14.00	60.00
vax	18.00	14.09	14.18	35.68	14.71	14.78

TAB. 6 – Réseau de TC de Stockholm. Intervalles de passage. F. Cong. 3.